PENENTUAN CADANGAN ASURANSI JIWA MULTILIFE DENGAN ASUMSI SEMI MARKOV

I Gusti Nyoman Yudi Hartawan
Jurusan Pendidikan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Pendidikan Ganesha, Singaraja
Hartawan.math@gmail.com

ABSTRAK

Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui cadangan dari asuransi jiwa multi life dengan asumsi semi markov. Asumsi semi markov digunakan dalam membuat model yang menggambarkan ketidakbebasan antara sisa usia hidup pasangan suami dan istri. Dengan asumsi semi markov, transisi antar state tidak hanya mempertimbangkan state saat ini pasangan tersebut berada tetapi juga mempertimbangkan waktu yang dihabiskan pasangan tersebut di state tersebut. Berdasarkan probabilitas transisi antar state kemudian ditentukan intensitas transisinya yang dilanjutkan dengan penentuan premi dan kemudian ditentukan cadangan untuk suatu waktu tertentu dengan pendekatan prospektif. Hasil penelitian menunjukkan terdapat ketidakbebasan antara sisa usia hidup suami dan istri dimana pengaruh kematian pasangan pada istri lebih tinggi dari pada suami, besar premi dan cadangan dapat ditentukan melalui rumus $\bar{A}_{\overset{1}{xy}:\overline{n|}} = 1-\delta\int_0^n e^{-\delta t}\left({}_t p_{xy}^{01} + {}_t p_{xy}^{02} + {}_t p_{xy}^{00}\right)dt$ dan $\bar{V}\left(\bar{A}_{\overset{1}{xy+t}:\overline{n-t|}}\right) = \bar{A}_{\overset{1}{xy+t}:\overline{n-t|}} - \bar{P}\left(\bar{A}_{\overset{1}{xy}:\overline{n|}}\right)\bar{a}_{\overline{xy+t}:\overline{n-t|}}$

Kata-kata kunci: cadangan, asumsi semi markov, probabilitas transisi, intensitas transisi, pendekatan prospektif.

ABSTRACT

This research is aimed to obtain reserves of multi life insurance by semi markov assumption. The assumption is used to make model that describe the dependency of remaining life time husband and wife. This assumption means that transition between state not only depend on curent state but also elapse time on that state. By its probabilities transition then we obtained its intensities transition that used to determine premmium and also its reserve by prospective approach. The result showed there is depedency between of their remaining life time that is a widow more risky than widower. The premmium and reserves can be obtained by the following formula $\bar{A}_{\overset{1}{xy}:\overline{n|}} = 1-\delta\int_0^n e^{-\delta t}\left({}_t p_{xy}^{01} + {}_t p_{xy}^{02} + {}_t p_{xy}^{00}\right)dt$ and $\bar{V}\left(\bar{A}_{\overset{1}{xy+t}:\overline{n-t|}}\right) = \bar{A}_{\overset{1}{xy+t}:\overline{n-t|}} - \bar{P}\left(\bar{A}_{\overset{1}{xy}:\overline{n|}}\right)\bar{a}_{\overline{xy+t}:\overline{n-t|}}$

Keywords: *reserves, semi markov assumption, probabilities transition, intensities transition, prospektive approach*

PENDAHULUAN

Semua orang pasti akan meninggal, ada yang meninggal ketika masih kecil, muda atau tua. Meninggalnya seseorang dapat menimbulkan dampak pada keluarga yang ditinggalkan terutama jika yang meninggal adalah tumpuan ekonomi keluarga. Jika hal tersebut terjadi maka kehidupan keluarga yang ditinggalkan dapat terancam. Setiap orang akan mengalami resiko (kematian) tersebut. Dalam rangka mengatasi kerugian yang timbul, manusia mengembangkan suatu mekanisme yang saat ini dikenal dengan asuransi.

Asuransi berfungsi sebagai mekanisme untuk mengalihkan resiko dari satu pihak (tertanggung) kepada pihak lain (penanggung). Pengalihan resiko ini bukan berarti tertanggung terhindar dari resiko yang dihadapi melainkan penanggung menyediakan keamanan finansial sebagai ganti dari kejadian (kematian) yang dialami oleh tertanggung. Sebagai imbalannya tertanggung membayarkan sejumlah uang atau premi kepada penanggung. Kesepakatan pemberian manfaat dan pembayaran premi tertuang dalam suatu kontrak yang dikenal dengan polis. Dari polis asuransi tersebut terdapat kontrak yang menyatakan bahwa tertanggung akan melakukan sejumlah pembayaran tertentu secara teratur kepada pihak perusahaan asuransi sebagai imbalan persetujuan penanggung untuk membayar benefit atau manfaat yang telah disepakati dalam polis asuransi jika orang yang ditanggung meninggal dunia.

Asuransi jiwa *multi life* merupakan salah satu jenis asuransi jiwa dimana yang ditanggung adalah resiko kematian untuk sekelompok orang dalam penelitian ini adalah pasangan suami istri. Dalam asuransi ini terdapat dua status yaitu status *joint life* dan *last survivor*. Pada perhitungan konvensional sering diasumsikan status dari suami dan istri independen padahal studi empirik menunjukkan adanya korelasi antara status suami dan istri. Seperti yang ditunjukkan oleh Jagger dan Sutton (1991) yaitu adanya peningkatan resiko relatif kematian setelah kematian pasangannya. Salah satu alternatif dalam memodelkan ketidakbebasan tersebut adalah dengan menggunakan model markov *finite-state*. Transisi antar states ditentukan oleh intensitas matrik transisi. Model *multi-state* markov banyak diterapkan pada ilmu aktuaria. Sebagai contoh dalam asuransi kesehatan, Waters (1984) memberikan model dimana state menggambarkan perbedaan kondisi kesehatan. Penggunaan model markov dalam *joint-life mortality* pertama kali dikembangkan oleh Norberg (1989) kemudian oleh Spreeuw dan Wang (2008) mengembangkan hasil dari Norberg dengan memasukan mortality yang bervariasi dengan waktu yang lewat sejak kematian pasangannya. Model markov memiliki kelemahan, yaitu model ini agak kaku karena dampak kematian pasangan diasumsikan konstan tanpa memperhatikan selang waktu sejak kematian pasangannya (Ji,2011). Hartawan (2013) menggunakan model markov dalam menentukan besar premi asuransi jiwa multi life.

Untuk itu pada penelitian ini ketidakbebasan tersebut akan dimodelkan dengan model semi markov dimana pada model ini mempertimbangkan waktu yang dihabiskan oleh sistem di status sekarang sejak transisi terakhir ke status tersebut. Berdasarkan probabilitas transisi antar state kemudian ditentukan intensitas transisinya yang dilanjutkan dengan penentuan premi, dan kemudian ditentukan cadangan preminya untuk suatu waktu tertentu dengan pendekatan prospektif.

METODE

Penelitian ini menggunakan pendekatan deduktif dimana terlebih dulu diuraikan ketidakbebasan sisa usia pasangan suami istri menggunakan asumsi semi markov kemudian dirumuskan rumus premi dan cadangan asuransi jiwa multi life. Hasiltersebut kemudian diterapkan pada data anuitas *joint life* dan *last survivor.*

HASIL DAN PEMBAHASAN

Model Semi Markov

Model semi markov pada asuransi jiwa multi life ini memiliki 4 state yang mungkin ditempati pasangan tersebut. Pada saat awal pasangan suami istri tersebut berada pada state 0 kemudian jika suaminya meninggal maka istri masuk state 1 , jika istri meninggal lebih dahulu maka suami masuk state 2 dan jika janda atau duda tersebut meninggal dengan jarak waktu lebih dari 5 hari maka akan masuk state 3. Jika jarak waktu kematian istri dan suami tidak lebih dari 5 hari maka pasangan tersebut langsung masuk state 3 (kematian tergolong *common shock*). Dinotasikan μ_{x+t} yang merupakan *force of mortality* dari istri berusia x jika diketahui suami masih hidup dan sebaliknya untuk suami. Untuk intensitas berpindah state 0 ke 3 secara langsung dinotasikan dengan μ^{03}.

Berikut merupakan probabilitas transisi antar state:

$${}_t p_z^{ij} = \Pr(X_{z+t} = j \mid X_z = i),\ \ i, j = 0,1,2,3$$

Dengan menggunakan persamaan forwad kolmogorov diperoleh:

$$\frac{d}{dt}\,{}_tp_z^{ij} = \sum_{k=0,k\neq j}^{n} \left({}_tp_z^{ik}\mu_{z+t}^{kj} - {}_tp_z^{ij}\mu_{z+t}^{jk} \right)$$

Atau dalam bentuk matriks

$$\frac{d}{dt} P(z, z+t) = P(z, z+t)A(z+t)$$

Dimana $P(z, z+t)$ merupakan sebuah matrix yang entrinya adalah ${}_tp_z^{ij}$, $i, j = 0,1,2,3$dan $A(z+t)$ disebut matrix intensitas dimana elemennya adalah μ_{z+t}^{ij}untuk $i \neq j$ dan $-\sum_{j=0,j\neq i}^{3} \mu_{z+t}^{ij}$ untuk $i = j$.

Dengan menyelesaikan persamaan diferensial di atas diperoleh ${}_tp_z^{ij}$

$${}_tp_z^{00} = \exp\left(-\int_0^t (\mu_{z+s}^{01} + \mu_{z+s}^{02} + \mu_{z+s}^{03})ds \right)$$

$${}_tp_z^{11} = \exp\left(-\int_0^t \mu_{z+s}^{13} ds \right)$$

$${}_tp_z^{22} = \exp\left(-\int_0^t \mu_{z+s}^{23} ds \right)$$

$${}_tp_z^{01} = \int_0^t ({}_sp_z^{00}\mu_{z+s}^{01}\,{}_{t-s}p_{z+s}^{11})ds$$

$${}_tp_z^{02} = \int_0^t ({}_sp_z^{00}\mu_{z+s}^{02}\,{}_{t-s}p_{z+s}^{22})ds$$

$${}_tp_z^{13} = \int_0^t {}_sp_z^{11}\mu_{z+s}^{13} ds$$

$${}_tp_z^{23} = \int_0^t {}_sp_z^{22}\mu_{z+s}^{23} ds$$

Estimasi Parameter

Langkah selanjutnya dalam proses mencari fungsi dari probabilitas transisi adalah mengestimasi parameternya. Dalam penelitian ini digunakan metode estimasi maksimum likelihood (MLE). Prinsip dari metode ini adalah memaksimumkan estimator parameter sehingga nilainya dekat dengan parameter. Terlebih dahulu didefinisikan fungsi densitas bersama dari T_x dan T_y, dimana T_x merupakan variabel random sisa usia dari istri dan T_y merupakan variabel random sisa usia dari suami. Fungsinya sebagai berikut:

$$f_{T(x)T(y)}(u,v)=\begin{cases} {}_u p^{00}_{x:y}\mu_{x+u}\ {}_{v-u}p^{22}_{y+u}\mu^{*}_{y+v},\ jika\ u<v \\ {}_v p^{00}_{x:y}\mu_{y+v}\ {}_{u-v}p^{22}_{x+v}\mu^{*}_{x+u},\ jika\ u>v \\ {}_u p^{00}_{x:y}\mu^{03} \qquad\qquad jika\ u=v \end{cases}$$

Dari fungsi densitas bersama di atas dapat dicari fungsi likelihoodnya, yaitu:

$$L=\prod_{i=1}^{n} f_{T_{x_i},T_{y_i}}(u_i,v_i)$$

Untuk memudahkan dalam proses perhitungan maka fungsi likelihood tersebut dilogkan, sehingga diperoleh:

$$l=\ln(L)=\sum_{i=1}^{n}\left(-\int_0^{v_i}(\mu_{x_i+t}+\mu_{y_i+t}+\mu^{03})dt+d_i^1\ln(\mu_{y_i+v_i})+d_i^2\ln(\mu_{x_i+v_i})+d_i^3\ln(\mu^{03})\right)$$
$$+\sum_{j=1}^{m_1}\left(-\int_0^{u_{1,j}}\mu^{*}_{x_j+v_j+t}dt+h_{1,j}\ln(\mu^{*}_{x_j+v_j+u_{1,j}})\right)+\sum_{k=1}^{m_2}\left(-\int_0^{u_{2,k}}\mu^{*}_{y_k+v_k+t}dt+h_{2,k}\ln(\mu^{*}_{y_k+v_k+u_{2,k}})\right)$$

Dimana

n adalah total jumlah pasangan dalam data

$m_1(m_2)$ adalah total jumlah dari duda (janda) dalam data

v_i adalah waktu sampai pasangan ke-i keluar dari state 0, $i=1,2,...,n$

$d_i^j=1$ jika pasangan ke-i berpindah dari state 0 ke state j pada $t=v_i, i=1,2,...,n$, $j=1,2,3$

$u_{1,j}(u_{2,k})$ adalah waktu sampai duda ke-j atau janda ke-k meninggalkan state 1 atau 2. $j=1,2,...,m_1$, $k=1,2,...,m_2$

$h_{1,j}=1$ jika duda meninggal pada $t=u_{1,j}$,

$h_{2,j}=1$ jika janda meninggal pada $t=u_{2,k}$

x_i dan y_i merupakan usia masuk dari istri dan suami dari pasangan ke-i.

$\mu^{*}(x,t)=(1+a_1e^{-k_1t})(\mu_{x+t}+\mu^{03})=F_1(t)(\mu_{x+t}+\mu^{03})$

dan

$\mu^{*}(y,t)=(1+a_2e^{-k_2t})(\mu_{y+t}+\mu^{03})=F_1(t)(\mu_{y+t}+\mu^{03})$

dengan $a_j>-1$ dan $k_j>0$ untuk $j=1,2$ dan t waktu sejak kematian pasangannya

Dengan menggunakan hukum gompertz persamaan loglikelihood tersebut menjadi

$$l_1=\sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{B_1C_1^{x_i}(C_1^{v_i}-1)}{\ln(C_1)}+d_i^2\ln(B_1C_1^{x_i+v_i})-\frac{B_2C_2^{y_i}(C_2^{v_i}-1)}{\ln(C_2)}\right.$$

$$+d_i^1 \ln(B_2 C_2^{y_i+v_i}) - v_i \mu^{03} + d_i^3 \ln(\mu^{03})\Big)$$

$$l_2 = \sum_{j=1}^{n} \left(-\int_0^{u_{1,j}} \left(1 + a_1 e^{-k_1 t}\right)\left(B_1 C_1^{x+t} + \mu^{03}\right) dt \right.$$

$$\left. +h_{1,j} \ln\left(\left(1 + a_1 e^{-k_1 t}\right)\left(B_1 C_1^{x+t} + \mu^{03}\right)\right)\right)$$

$$l_3 = \sum_{k=1}^{n} \left(-\int_0^{u_{2,k}} \left(1 + a_2 e^{-k_2 t}\right)\left(B_2 C_2^{y+t} + \mu^{03}\right) dt \right.$$

$$\left. +h_{2,k} \ln\left(\left(1 + a_2 e^{-k_2 t}\right)\left(B_2 C_2^{y+t} + \mu^{03}\right)\right)\right)$$

Dimana (B_1, C_1) dan (B_2, C_2) merupakan parameter Gompertz untuk mortalitas istri dan suami pada state 0. (B_3, C_3) dan (B_4, C_4) merupakan parameter Gompertz untuk mortalitas istri dan suami pada state 1 dan 2. Langkah selanjutnya adalah memaksimumkan fungsi likelihood di atas yaitu dengan mencari turunan parsialnya yang disamakan dengan 0

untuk l_1

$$\frac{\partial}{\partial B_1} l_1 = 0 \,, \frac{\partial}{\partial C_1} l_1 = 0 \quad \frac{\partial}{\partial B_2} l_1 = 0 \quad \frac{\partial}{\partial C_2} l_1 = 0 \quad \frac{\partial}{\partial \mu^{03}} l_1 = 0$$

Demikian juga untuk l_2 dan l_3.

Dengan menyelesaikan dari persamaan di atas diperoleh estimator untuk masing-masing parameternya.

Penentuan Premi Asuransi Jiwa *Multi-Life Survivorship*

Pada model semi markov ini terdapat 3 kemungkinan kejadian yang dapat dialami masing-masing pasangan, yaitu: 1. Suami dan istri tetap hidup sampai akhir periode pengamatan, 2. Istri tetap hidup sampai akhir periode pengamatan tetapi suaminya meninggal pada suatu waktu di periode pengamatan, dan 3. Suami tetap hidup sampai akhir periode pengamatan tetapi istrinya meninggal pada suatu waktu di periode pengamatan. Berdasarkan informasi tersebut, dapat dicari premi tunggal bersihnya, yaitu:

$$\bar{A}_{\overset{1}{\overline{xy}}:\overline{n|}} = E[Z] = E[z_{T(\overline{xy})}]$$

$$= \int_0^n z_t \, f_{T(\overline{xy})}(t) dt$$

$$= \int_0^n z_t \, {}_t p_{\overline{xy}} \, \mu_{\overline{xy}}(t) dt$$

Dimana,

$$\bar{A}_{\overset{1}{\overline{xy}}:\overline{n}|} = 1 - \delta \bar{a}_{\overline{\overline{xy}:n}|}$$

dengan

$$\bar{a}_{\overline{\overline{xy}:n}|} = \int_0^n e^{-\delta t} \left({}_t p_{\overline{xy}}^{01} + {}_t p_{\overline{xy}}^{02} + {}_t p_{\overline{xy}}^{00} \right) dt$$

Sehingga diperoleh

$$\bar{A}_{\overset{1}{\overline{xy}}:\overline{n}|} = 1 - \delta \int_0^n e^{-\delta t} \left({}_t p_{\overline{xy}}^{01} + {}_t p_{\overline{xy}}^{02} + {}_t p_{\overline{xy}}^{00} \right) dt$$

Penentuan Cadangan

Diberikan cadangan (reserves) untuk asuransi jiwa multi life kontinu seumur hidup sebesar 1 yang diterbitkan untuk (x, y) dengan premi tahunanya dinotasikan dengan $\bar{P}\left(\bar{A}_{[x,y]}\right)$. Berdasar pada prinsip ekivalensi yaitu nilai harapan dari kerugian prospektif pada waktu t, yang berarti tertanggung tetap hidup sampai waktu t kemudian didefinisikan hubungan cadangan untuk tertanggung yang masih hidup pada t tahun berikutnya. Secara formal, Untuk $T(x) > t$, kerugian prospektifnya dapat dituliskan sebagai berikut:

$${}_t L = v^{T(x,y)-t} - \bar{P}\left(\bar{A}_{[x,y]}\right) \bar{a}_{\overline{T(x,y)-t)}|}$$

Cadangan sebagai suatu nilai harapan dihitung menggunakan distribusi bersyarat (*conditional distribution*) dari sisa usia pada saat t untuk pasangan yang terseleksi pada waktu (x, y), notasi nya sebagai berikut:

$$\begin{aligned} {}_t \bar{V}\left(\bar{A}_{[x,y]}\right) &= E\left[{}_t L \mid T(x,y) > t \right] \\ &= A_{[x,y]+t} - \bar{P}\left(\bar{A}_{[x,y]}\right) \bar{a}_{[x,y]+t} \end{aligned}$$

Persamaan di atas dapat ditulis menjadi

$${}_t \bar{V}\left(\bar{A}_{\overline{xy}}\right) = \bar{A}_{\overline{xy}+t} - \bar{P}\left(\bar{A}_{\overline{xy}}\right) \bar{a}_{\overline{xy}+t}$$

Persamaan di atas menyatakan bahwa cadangan merupakan selisih antara nilai sekarang aktuaria untuk asuransi jiwa multi life seumur hidup pada usia $x+t$ dengan nilai sekarang aktuaria dari premi tahun berikutnya.

Studi Kasus

Hasil pada pembahasan diterapkan pada data anuitas *joint life* dan *last survivor* yang datat diperoleh pada www.soa.org. Jumlah data yang digunakan adalah 11262 pasangan suami istri. Berikut ringkasan datanya,

Tabel 1. Ringkasan Data

Umur (suami)	Jumlah	Jumlah kematian
$50 \le umur < 60$	1067	41
$60 \le umur < 70$	6511	469
$70 \le umur < 80$	3832	611
$umur \ge 80$	216	77
Total	11626	1157

Umur (istri)	Jumlah	Jumlah kematian
$50 \le umur < 60$	2480	29
$60 \le umur < 70$	6646	195
$70 \le umur < 80$	2394	185
$umur \ge 80$	106	16
Total	11626	396

Dari tabel di atas dapat dilihat jumlah kematian suami lebih banyak daripada istri yaitu hampir 3 kali lipat.

Hasil estimasi parameter pada model semi markov adalah sebagai berikut;

Tabel 2. Hasil estimasi parameter

Parameter	Estimasi	Std.error
B_1	4.864993×10^{-7}	2.049396×10^{-17}
C_1	1.1335	5.023342×10^{-26}
B_2	2.61899×10^{-5}	1.382164×10^{-19}
C_2	1.0987	4.324159×10^{-25}
μ^{03}	0.0014	1.560579×10^{-25}

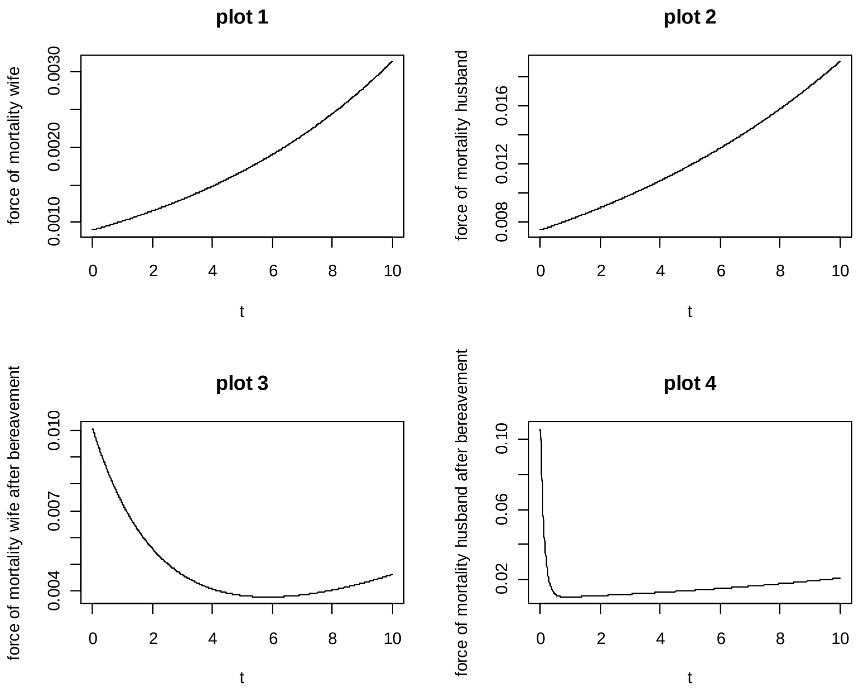
a_1	3.3786	7.389845×10^{-32}
k_1	0.5225	1.173435×10^{-30}
a_2	11.054	4.342976×10^{-33}
k_2	7.906	4.342976×10^{-33}

Dari hasil tersebut dapat dibuat *force of mortality* pada state 1 dan 2, yaitu:

$\mu^*(x,t) = (1+3.3786e^{-0.5225t})(4.864993\times10^{-7}\times1.1335^{x+t}+0.0014)$ dan

$\mu^*(y,t) = (1+11.054e^{-7.906t})(2.61899\times10^{-5}\times1.0987^{y+t}+0.0014)$

berikut merupakan plot dari *force of mortality*



Gambar 1. Plot *force of mortality* pada model semi markov

Dari plot tersebut dapat dilihat pengaruh kehilangan pasangan terhadap *force of mortality* diawal kehilangan sangat tinggi tetapi mengalami penurunan seiring bertambahnya waktu.Berdasarkan gendernya tampak plot dari istri lebih lambat turun dibandingkan suami ini menandakan kematian pasangan pada istri lebih berpengaruh daripada suami.

Contoh penentuan premi dan cadangan

Misalkan ingin dicari besar premi tunggal bersih asuransi berjangka 10 tahun dan cadangan pada tahun ke 8 dimana diketahui usia istri $(x)=58$, usia suami $(y)=60$ dan suku bunga $(i)=6\%$

Untuk menghitung premi tunggal bersihnya digunakan rumus berikut:

$$\bar{A}_{\overset{1}{\overline{xy}}:\overline{n}|} = 1-\delta\int_0^n e^{-\delta t}\left({}_t p_{\overline{xy}}^{01} + {}_t p_{\overline{xy}}^{02} + {}_t p_{\overline{xy}}^{00}\right)dt$$

Dengan memasukkan nilai-nilai estimator kedalam persamaan tersebut dan dengan menggunakan integrasi numerik diperoleh $\bar{a}_{\overline{xy}:\overline{10}|} = 7.52421$,Dengan demikian ,

$$\begin{aligned}\bar{A}_{\overset{1}{\overline{xy}}:\overline{10}|} &= 1-\delta\bar{a}_{\overline{\overline{xy}}:\overline{10}|}\\ &= 1-0.0582689\times 7.52502\\ &= 0.561572\end{aligned}$$

Jadi besarnya premi sekali bayar yang harus dibayarkan oleh pasangan suami istri tersebut adalah sebesar 0.561572

Dengan cara yang sama diperoleh $\bar{a}_{\overline{\overline{xy}+8}:\overline{2}|} = 1.88492$ dan $\bar{A}_{\overset{1}{\overline{\overline{xy}+8}}:\overline{2}|} = 0.890168$

$$\begin{aligned}{}_8\bar{V}\left(\bar{A}_{\overset{1}{\overline{xy}}:\overline{10}|}\right) &= \bar{A}_{\overset{1}{\overline{xy}+8}:\overline{2}|} - \bar{P}\left(\bar{A}_{\overset{1}{\overline{xy}}:\overline{10}|}\right)\bar{a}_{\overline{\overline{xy}+8}:\overline{2}|}\\ &= 0.890168-0.472259\times 1.88492\\ &= 3.33067\times 10^{-16}\end{aligned}$$

Jadi besar cadangan pada tahun ke -8 adalah 3.33067×10^{-16}

PENUTUP

Dari pembahasan di atas dapat disimpulkan sebagai berikut:

1. Asumsi semi markov dapat digunakan dalam membuat model aktuaria dari produk asuransi jiwa multi life.
2. Terdapat ketidakbebasan antara waktu hidup antara suami dan istri dimana diawal kehilangan pasanganya terjadi peningkatan *force of mortality* tetapi dampak tersebut semakin menurun seiring bertambahnya waktu
3. Dengan menggunakan asumsi semi markov dapat ditentukan premi dan cadangan asuransi jiwa multi life yaitu dengan rumus berikut:

$$\bar{A}_{\overset{1}{\overline{xy}}:\overline{n}|} = 1-\delta\int_0^n e^{-\delta t}\left({}_t p_{\overline{xy}}^{01} + {}_t p_{\overline{xy}}^{02} + {}_t p_{\overline{xy}}^{00}\right)dt$$

$$ {}_t\bar{V}\left(\bar{A}^{\;1}_{xy+t:\overline{n-t|}}\right) = \bar{A}^{\;1}_{xy+t:\overline{n-t|}} - \bar{P}\left(\bar{A}^{\;1}_{xy:\overline{n|}}\right)\bar{a}_{\overline{xy+t:n-t|}} $$

DAFTAR PUSTAKA

Atkinson, K. 1993. *Elementary Numerical Analysis Second Edition.* John Wiley & Sons. Canada.

Bain, Lee J dan Engelhardt, Max. 1992. *Introduction to Probability and Mathematical Statistics. California :* Duxbury, 1992

Bowers, N.L., Gerber, H.U., Hickman, J.C., Jones, D.A. dan Nesbitt, C.J., 1997, *Actuarial Mathematics 2nd Edition*, The Society of Actuaries, Itasca, Illinois.

Hartawan, I G N Yudi. 2013. *Pendekatan Model Multi Status Markov Dalam Penentuan Premi Asuransi Jiwa Multi-life*. Ejournal undiksha vol 3 no 1: Seminar Nasional FMIPA Undiksha 2013.

Janssen, J., Manca, R., 2006, *Applied Semi-Markov Processes*, Springer Verlag, New York

Ji, Min., Hardy, Mary. dan Li, Johnny Siu-Hang. 2010. *Markoviann Approaches to Joint Life Mortality. North American Actuarial Journal, Volume 15, number 3.*

London, Dick, 1997, *Survival Models and Their Estimation 3rd Edition*, Actex Publication, Winsted

Norberg, R. 1989. *Actuarial Analysis of Dependent Lives.* Bulletin of the Swiss Association of Actuaries 2: 243–254.

Ross, Sheldon M. 2010. *Introduction to Probability Models 10th edition*. USA : Elsevier, Inc.